Concours AMCPE session 2015

Composition : <u>Mathématiques 5</u> (algèbre, analyse)

Durée : 3 Heures

Ce sujet comporte 4 exercices indépendants

EXERCICE 1

Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1-Calculer $A^3 - 3A^2 + 3A - I$ où I est la matrice unité d'ordre 3.

2-A est-elle diagonalisable ? Justifier votre réponse.

3-Justifier, sans calcul de déterminant, que A est inversible et déterminer A^{-1}.

EXERCICE 2

On considère l'espace vectoriel IR^3 muni de sa base canonique B=(e_1, e_2, e_3) et l'endomorphisme f de IR^3 défini par f(x, y, z)=(2x – 2y + z, 2x – 3y + 2z, -x + 2y).

1- Déterminer la matrice A de f relativement à la base B.

2-a) Déterminer les valeurs propres de f.

b) Déterminer le sous-espace propre de associé à chaque valeur propre.

c) Justifier que f est diagonalisable.

3- On pose $P=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Calculer P^{-1}(inverse de P) et montrer que $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

4- Calculer A^n pour tout entier naturel non nul n.

5- Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x_1' = 2x_1 - 2x_2 + x_3 \\ x_2' = 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \\ x_3' = -x_1 - 2x_2 \end{cases}$ où x_1, x_2 et x_3 sont des fonctions dérivables de la variable réelle t et de fonctions dérivées x_1', x_2' et x_3'.

EXERCICE 3

Soit $f : \mathbb{R}_+^* - \{1\} \to \mathbb{R}$ On pose $A=\int_0^1 f(t)dt$

$x \mapsto \frac{x-1}{\ln x}$

1- Démontrer que f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}_+$ et que A converge.

2- On pose $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ et $h(x)=\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

Démontrer que F et h sont dérivables sur]0 ;1[, calculer F'(x) et h'(x), et en déduire que pour tout x de [0 ;1[, F'x) = h(x).

3- Calculer pour tout x de]0 ;1[, $\int_x^{x^2} \frac{dt}{t\ln t}dt$, en déduire $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$ puis la valeur de A.

EXERCICE 4

On considère l'équation différentielle : y' + 2xy = 1 (E)

On considère la fonction g de la variable réelle x définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x)=e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt$.

1- Montrer que g est impaire.

2- Montrer que g est solution de l'équation différentielle (E).

3- En déduire en fonction de g toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

4- Soit $y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une solution développable en série entière de l'équation différentielle (E).

a) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+2)a_{n+2} + 2a_n = 0$.

b) Déterminer a_1. Expliciter les coefficients a_{2n+1} pour tout entier n.

c) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniquement déterminée par la valeur de a_0, et exprimer les coefficients a_{2n}, pour tout $n \in \mathbb{N}$, en fonction de a_0.

d) Réciproquement, on considère une suite $(a_n)_{n\in IN}$ vérifiant la relation de récurrence

$\forall n \in IN$, $(n+2)a_{n+2} + 2a_n = 0$.

Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

e) Expliciter le développement en série entière de g.

5- On considère les fonctions g_1 et g_2 définies par :

$$\forall x \in IR,\ g_1(x)=e^{-x^2} \text{ et } g_2(x)=\int_0^x e^{t^2}dt$$

a) Expliciter le développement en série entière des fonctions g_1 et g_2.

b) En déduire le développement en série entière de la fonction g_1g_2 à l'aide d'un résultat dont on rappellera l'énoncé. En déduire la relation suivante : $\forall k \in IN,\ \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{2j+1} C_k^j = \frac{4^k (k!)^2}{(2k+1)!}$.